

PENERAPAN BARISAN DAN DERET

A. MODEL PERKEMBANGAN USAHA

Jika perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha (misalnya: produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja, penanaman modal) berpola seperti barisan aritmetika, maka prinsip-prinsip barisan aritmetika dapat digunakan untuk menganalisa perkembangan variabel tersebut. Berpola seperti barisan aritmetika maksudnya bahwa variabel yang bersangkutan bertambah secara konstan dari satu periode ke periode berikutnya.

Contoh soal:

1. Perusahaan genteng nglames menghasilkan 3000 buah genteng pada bulan pertama produksinya. Dengan penambahan tenaga kerja dan peningkatan produktifitas, perusahaan mampu menambah produksinya sebanyak 500 buah setiap bulan. Jika perkembangan produksinya konstan, berapa buah genteng yang dihasilkannya pada bulan kelima ? Berapa buah yang telah dihasilkan sampai dengan bulan tersebut ?
2. Besar penerimaan PT ABC dari hasil penjualan barangnya Rp 720 juta pada tahun kelima dan Rp 980 pada tahun ketujuh. Apabila perkembangan hasil penjualan tersebut berpola seperti barisan aritmetika, berapa perkembangan penerimaannya per tahun ? Berapa besar penerimaan pada tahun pertama dan pada tahun ke berapa penerimaannya sebesar Rp 460 juta ?
3. Pabrik sepatu jempol memproduksi 10.000 pasang sepatu pada tahun pertama operasinya. Namun karena situasi perekonomian yang tidak menguntungkan, produksinya terus menyusut 500 pasang setiap tahun. Berapa produksinya:
 - a. pada tahun keempat ?
 - b. pada tahun ke-lima belas ?
 - c. Berapa yang telah diproduksi sampai dengan tahun kesepuluh ?
4. Pabrik kecap XYZ memproduksi 24.000 botol kecap pada tahun ke-6 operasinya. Karena persaingan keras dari kecap-kecap merek lain, produksinya terus menurun secara konstan sehingga pada tahun ke-10 hanya memproduksi 18.000 botol.
 - a. Berapa botol penurunan produksinya per tahun ?
 - b. Pada tahun keberapa pabrik kecap XYZ ini tidak berproduksi lagi (tutup) ?
 - c. Berapa botol kecap yang dihasilkan selama operasinya ?
5. Seorang pedagang memperoleh laba sebesar Rp 700 ribu pada bulan kelima kegiatan usahanya. Sedangkan jumlah seluruh laba yang diperoleh selama tujuh bulan pertama sebanyak sebanyak Rp 4.620 ribu. Hitunglah:
 - a. Laba yang diperoleh pada bulan pertama dan peningkatan labanya per bulan.

- b. Laba pada bulan kesepuluh.
 - c. Jumlah laba selama setahun pertama dari kegiatan usahanya ?
6. Jumlah hasil produksi sebuah perusahaan selama 5 tahun pertama operasinya sebanyak 3.000 unit, pada tahun ke-6 perusahaan tersebut tutup. Hitunglah produksi pada tahun pertama dan prosentase kenaikan atau penurunan produksinya.
 7. Perusahaan X memulai produksinya dengan 1.000 unit, dan berkurang 100 unit setiap bulannya. Sedangkan perusahaan Y mengawali produksinya dengan 500 unit, meningkat 25 unit setiap tahun.
 - a. Pada tahun keberapa produksi mereka sama jumlahnya ?
 - b. Kapan perusahaan X akan memproduksi sebanyak 0 ?
 - c. Berapa produksi perusahaan Y pada tahun tersebut ?

B. MODEL PERTUMBUHAN PENDUDUK

Penerapan deret ukur yang paling konvensional di bidang ekonomi adalah dalam hal penghitungan pertumbuhan penduduk, sebagaimana pernah dinyatakan oleh Malthus, penduduk dunia tumbuh mengikuti pola deret ukur.

$$P_n = P_1 r^{n-1}$$

Dimana :

- P : populasi penduduk pada tahun basis (tahun pertama / ke-1)
- P_n : populasi penduduk pada tahun ke-n
- r : (1+ persentase pertumbuhan penduduk per tahun)
- n : jumlah penduduk

Contoh soal:

1. Penduduk suatu kota berjumlah 100.000 jiwa pada tahun 1975, tingkat pertumbuhannya 4 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 1984 dan tahun 2000.
2. Penduduk suatu negara tercatat 25 juta jiwa pada tahun 1980. Berapa jumlah penduduk pada tahun 1990 dan 2000, jika tingkat pertumbuhannya 3% per tahun ?
3. Penduduk sebuah kota tercatat 2,5 juta jiwa pada tahun 1982, dan diperkirakan menjadi 3 juta jiwa pada tahun 1986. Jika tahun 1980 dianggap merupakan tahun basis
 - a. Berapa persen tingkat pertumbuhannya ?
 - b. Berapa jumlah penduduk pada tahun 1980 ?
 - c. Berapa jumlah penduduk pada tahun 1991 ?
 - d. pada tahun berapa penduduknya berjumlah 5 juta jiwa ?

C. BUNGA MAJEMUK

Penghitungan bunga majemuk merupakan penerapan dari barisan geometri (barisan ukur).

Misal suatu modal sebesar Rp 1.000,- (P) dibungakan secara majemuk dengan suku bunga 10% per tahun (i) , maka besarnya modal tersebut di masa datang (F) dapat dihitung sebagai berikut:

$$\text{setelah 1 tahun: } F_1 = 1000 + (1000 \times 0,10) = 1100$$

$$F_1 = P + Pi = P(1 + i)$$

$$\text{setelah 2 tahun: } F_2 = 1100 + (1100 \times 0,10) = 1210$$

$$F_2 = (P + Pi) + (P + Pi) i = P + Pi + Pi + Pi^2$$

$$= P + 2 Pi + Pi^2 = P (1 + 2i + i^2)$$

$$= P (1 + i)^2$$

$$\text{setelah 3 tahun: } F_3 = P (1 + i)^3$$

$$\text{setelah n tahun: } F_n = P (1 + i)^n$$

dengan demikian nilai nilai di masa datang dari suatu jumlah sekarang adalah:

$$F_n = P(1 + i)^n$$

Dimana:

F_n = nilai di masa depan

P = jumlah sekarang

i = suku bunga per tahun

n = jumlah tahun

Apabila bunga dibayarkan lebih dari satu kali (misalkan m kali) dalam satu tahun maka rumus nilai di masa depan menjadi:

$$F_n = P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{nm}$$

m = frekuensi pembayaran dalam setahun.

Secara matematis rumus di atas dapat dimanipulasi untuk menentukan nilai sekarang dari nilai di masa datang.

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n}$$

atau

$$P = \frac{F}{\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{nm}}$$

Latihan:

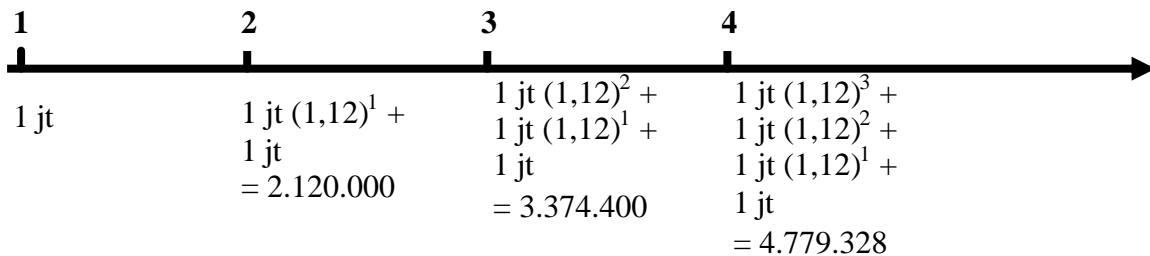
1. Nona Fina menabung uangnya Rp 1.500.000 di Bank dengan tingkat bunga 15% per tahun. Berapakah nilai uangnya di masa datang setelah 10 tahun kemudian jika dibunga-majemukkan secara: a). Semesteran, b). Kuartalan, dan c). Bulanan.
2. Seorang pengusaha berharap lima tahun mendatang memperoleh laba sebesar Rp 25.000.000. Jika tingkat bunga yang berlaku saat ini 12% per tahun dan dibayarkan secara kuarta, berapakah jumlah laba pengusaha tersebut saat ini ?

D. NILAI MASA DATANG DARI ANUITAS

Anuitas adalah serangkaian pembayaran yang dibuat secara **periodik** dan dalam jumlah uang yang **tetap** atau sama. Dalam anuitas diasumsikan bahwa semua pembayaran dibuat pada akhir periode dengan bunga majemuk.

Ilustrasi:

Nina menabung uangnya sebanyak 1 juta setiap permulaan tahun, dimana bunga 12% per tahun secara majemuk. Berapa jumlah tabungan Nina setelah 4 tahun (akhir tahun ke-3 atau awal tahun ke-4) ?



Ingat rumus Deret Geometri: $D_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$ dapat ditulis sebagai $D_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$

Maka jumlah tabungan Nina setelah 4 tahun dapat dihitung sbb:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$S_n = \frac{1jt((1,12)^4 - 1)}{(1,12 - 1)}$$

$$S_n = 1jt \frac{((1 + 0,12)^4 - 1)}{0,12}$$

$$S_n = \frac{1jtx0,574}{0,12}$$

$$S_n = 4.779.328$$

Sehingga di dapat rumus **nilai masa datang dari anuitas** adalah:

$$S_n = \frac{P((1 + i)^n - 1)}{i}$$

Dana Cadangan

Dana cadangan disebut juga sebagai *sinking fund* yaitu dana yang disisihkan (dicadangkan) untuk pembayaran nilai tertentu dimasa yang akan datang. Misalkan perusahaan menyisihkan sebagian labanya untuk membayar utang sejumlah tertentu setelah sekian tahun di masa datang. Rumus dana cadangan diperoleh dari rekayasa rumus nilai masa datang dari anuitas di atas, yaitu:

$$P = \frac{Sn}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]} \quad \text{atau} \quad P = Sn \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Latihan:

1. Nona Debby menabung uangnya di Bank setiap awal bulan sebesar Rp 500.000 selama 8 tahun. Jika tingkat bunga yang berlaku sebesar 18% per tahun, berapakah jumlah uang nona Debby di masa datang bila bunga dibayarkan (diperhitungkan) secara bulanan ?
2. Suatu perusahaan ingin menyisihkan dananya setiap bulan selama 5 tahun untuk pembayaran pinjaman perusahaan. Jumlah nilai pinjaman perusahaan tersebut diperkirakan 5 tahun mendatang sebesar Rp 75.000.000. Bunga dibayarkan secara majemuk sebesar 15% per tahun. Berapa jumlah dana yang harus disisihkan atau dicadangkan setiap bulan oleh perusahaan agar dapat melunasi pinjaman tersebut ?

E. NILAI SEKARANG DARI ANUITAS

Nilai sekarang dari anuitas adalah jumlah dari nilai-nilai sekarang dari setiap periode pembayaran atau penerimaan uang tertentu.

$$A_n = P(1+i)^{-1} + P(1+i)^{-2} + \dots + P(1+i)^{-n}$$

Jika difaktorkan dengan $(1+i)^{-n}$, maka persamaan di atas menjadi:

$$A_n = P(1+i)^{-n} \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i)^1 + (1+i) + 1 \right]$$

Karena $S_n = \left[1 + (1+i) + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} \right]$ persamaan diatas menjadi:

$$A_n = P(1+i)^{-n} [S_n]$$

$$A_n = P(1+i)^{-n} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$A_n = P \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Jadi rumus nilai sekarang dari anuitas adalah:

$$A_n = P \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Dimana:

A_n = Nilai sekarang dari anuitas

P = Jumlah pembayaran per periode

i = Tingkat bunga tahunan

n = Jumlah periode pembayaran

Penyisihan Pinjaman

Konsep penyisihan pinjaman (*loan amortization*) hampir sama dengan dana cadangan (*sinking fund*). Untuk dana cadangan pembayaran cicilan hutang secara periodik dilakukan saat ini, agar di masa mendatang akan terlunasi jumlah tertentu utang atau pinjaman; sedangkan penyisihan pinjaman jumlah tertentu utang atau pinjaman sudah diterima saat ini, kemudian dilakukan pembayaran cicilan atau angsuran utang secara periodik.

Rekayasa rumus nilai sekarang dari anuitas akan diperoleh rumus penyisihan pinjaman (*loan amortization*) yaitu:

$$P = \frac{A_n}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]} \quad \text{atau} \quad P = A_n \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right]$$

Dimana: A_n = Nilai sekarang dari anuitas

P = Jumlah pembayaran per periode

i = Tingkat bunga tahunan

n = Jumlah periode pembayaran

Latihan:

1. Nancy ingin menabung setiap bulan sebanyak Rp 2.500.000 setiap permulaan tahun, selama 4 tahun di suatu Bank. Jika tingkat bunga yang berlaku adalah 12% per tahun yang dibayar secara majemuk. Berapakah jumlah nilai sekarang dari tabungan Nancy selama 4 tahun tersebut ?
2. Shinta berkeinginan membeli rumah dengan pembelian secara kredit seharga Rp 80.000.000. Sesuai perjanjian dari pihak pengembangan (*developer*) waktu pembayaran rumah tersebut adalah 5 tahun, dimana pembayaran dilakukan secara cicilan setiap bulan. Tingkat bunga yang dikenakan dalam pembayaran cicilan ini adalah 15% per tahun. Berapakah jumlah pembayaran yang harus dicicil setiap bulannya ?